EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2007

Proba scrisă la MATEMATICĂ

PROBA D

Varianta ….028

Profilul: Filiera Teoretică: sp.: matematică-informatică, Filiera Vocațională, profil Militar, Specializarea: specializarea matematică-informatică

♦ **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.**

La toate subiectele se cer rezolvări cu soluții complete

SUBIECTUL I (20p)

(4p) **a)** Să se calculeze modulul numărului complex $1+i$.

(4p) **b)** Să se calculeze modulul vectorului $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PM}$, unde $M(0,1)$, $N(-1,0)$ şi $P(0,-1)$.

(4p) **c)** Să se determine ecuația tangentei la cercul $x^2+y^2=20$ dusă prin punctul $P(2,4)$.

(4p) **d)** Să se arate că patrulaterul cu vârfurile în punctele $L(1,0)$, $M(0,1)$, $N(-1,0)$ şi $P(0,-1)$ este pătrat.

(2p) **e)** Să se calculeze coordonatele punctului de intersecție al diagonalelor patrulaterului cu vârfurile în punctele $L(1,0)$, $M(0,1)$, $N(-1,0)$ şi $P(0,-1)$.

(2p) **f)** Să se determine $a,b\in\mathbf{R}$, astfel încât să avem egalitatea de numere complexe $(3+2i)(3-2i)=a+bi$.

SUBIECTUL II (30p)

1.

(3p) **a)** Dacă într-o progresie geometrică primul termen este 1 şi rația este 3 , să se calculeze termenul al şaselea .

(3p) **b)** Să se calculeze probabilitatea ca un număr $n\in\{0,1,2,3,4\}$ să verifice relația $n^2+4<3^n$.

(3p) **c)** Dacă funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=x^{13}+1$, are inversa $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, să se calculeze $g(2)$.

(3p) **d)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2+4)=3$.

(3p) **e)** Să se calculeze suma cuburilor rădăcinilor polinomului $f=X^3-X-6$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=2^x+3^x$.

(3p) **a)** Să se calculeze $f'(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

(3p) **b)** Să se calculeze $\int_0^1 f(x)dx$.

(3p) **c)** Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbf{R}$.

(3p) **d)** Să se calculeze $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

(3p) **e)** Să se determine ecuația asimptotei către $-\infty$ la graficul funcției f.

SUBIECTUL III (20p)

În $M_2(\mathbf{R})$ se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -2\end{pmatrix}$ şi $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

(4p) **a)** Să se verifice că $A^2=B^2=I_2$.

(4p) **b)** Să se calculeze determinantul şi rangul matricei A.

(4p) **c)** Să se arate că matricea B este inversabilă şi să se calculeze inversa ei.

(2p) **d)** Să se verifice că $AB\neq BA$.

(2p) **e)** Să se arate că $(BA)^n\neq I_2$, $\forall n\in\mathbf{N}^*$.

(2p) **f)** Să se arate că ecuaţia $X^2=I_2$ are cel puţin 2007 soluţii în mulţimea $M_2(\mathbf{Z})$.

(2p) **g)** Să se dea un exemplu de structură de grup în care există două elemente de ordin finit, al căror produs nu are ordin finit.

SUBIECTUL IV (20p)

Se consideră numerele reale $a_1,a_2,...,a_n$ şi funcţiile $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$
$f(x)=a_1\cos x+a_2\cos 2x+...+a_n\cos nx$ şi $F(x)=a_1\sin x+\frac{a_2}{2}\sin 2x+...+\frac{a_n}{n}\sin nx$,
unde $n\in\mathbf{N}$, $n\geq 2$. Notăm cu $S(p,q)=\int_0^{2\pi}\cos px\cos qx\,dx$, $\forall\ p,q\in\mathbf{N}^*$.

(4p) **a)** Să se arate că funcţia F este o primitivă a funcţiei f pe $\mathbf{R}$.

(4p) **b)** Să se verifice că $F(x+2k\pi)=F(x)$, $\forall k\in\mathbf{Z}$, $\forall x\in\mathbf{R}$.

(4p) **c)** Utilizând rezultatul : “*Dacă o funcţie* $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *este periodică şi monotonă atunci funcţia* g *este constantă* “ , să se arate că dacă $f(x)\geq 0$, $\forall x\in\mathbf{R}$, atunci funcţia F este constantă .

(2p) **d)** Utilizând formula: $2\cos a\cos b=\cos(a-b)+\cos(a+b)$, $\forall a,b\in\mathbf{R}$, să se arate că $S(p,q)=0$, dacă $p\neq q$, $p,q\in\mathbf{N}^*$.

(2p) **e)** Să se arate că $S(p,p)=\pi$, $\forall\ p\in\mathbf{N}^*$.

(2p) **f)** Să se demonstreze că dacă $f(x)\geq 0$, $\forall x\in\mathbf{R}$, atunci $a_1=a_2=...=a_n=0$.

(2p) **g)** Să se arate că, dacă $\int_0^{2\pi}f^2(x)dx=0$, atunci $a_1=a_2=...=a_n=0$.